Exercice 1

```
0   PP(G)
1     pour chaque sommet u de V faire
2         couleur[u] <- BLANC
3         pere[u] <- nil
4     temps <- 0
5     pour chaque sommet u de V faire
6         si couleur[u] = BLANC
7             alors Visiter_PP(u)
```

```
0   Visiter_PP(u)
1     couleur[u] <- GRIS
2     d[u] <- temps <- temps + 1
3     pour chaque v de Adj[u] faire
4         si couleur[v] = BLANC
5             alors pere[v] <- u
6                   Visiter_PP(v)
7     couleur[u] <- NOIR
8     f[u] <- temps <- temps + 1
```

Appliquer l'algorithme de parcours en profondeur `PP` au graphe G_1 de la Fig. 1on conviendra que dans les listes d'adjacence les sommets sont rangés dans l'ordre croissant de leur numéro). Détailler l'évolution de la pile d'exécution lors de chaque appel de `Visiter_PP(u)` et donner le contenu final des tableaux `d[]`, `f[]` et `pere[]`.

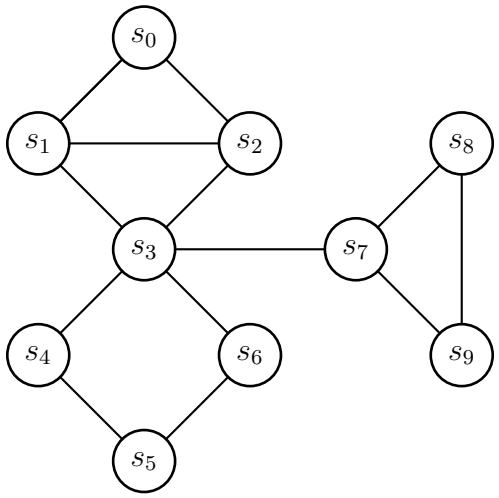


Figure 1 – G_1

Exercice 2

(*)

1. Modifier l'algorithme `PP` pour compter le nombre de sommets de la composante connexe d'un sommet donné d'un graphe non orienté.
2. Modifier l'algorithme `PP` pour tester si un graphe non orienté possède un cycle.

Exercice 3

1. Donner la classification des arcs de l'arborescence obtenue en applicant l'algorithme PP au graphe G_1 ci-dessus.
2. Même question pour les arcs du graphe orienté donné par les listes d'adjacence suivantes :

```
0 : 1, 2, 3
1 : 3
2 : 1
3 : 4
4 : 0
5 : 4, 6
6 : 5
```

Exercice 4

Pour les deux graphes non orientés H_1 et H_2 ci-dessous dire si T_1 et T_2 peuvent respectivement être des arbres couvrants obtenus par un parcours en profondeur − Justifier les réponses en spécifiant l'éventuel sommet de départ et l'ordre des sommets dans les listes d'adjacence.

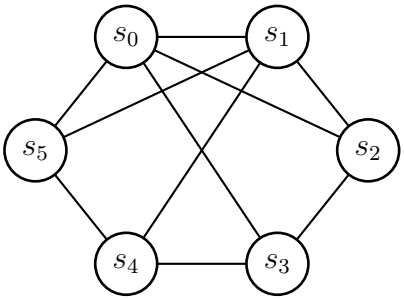


FIGURE 2 – H_1

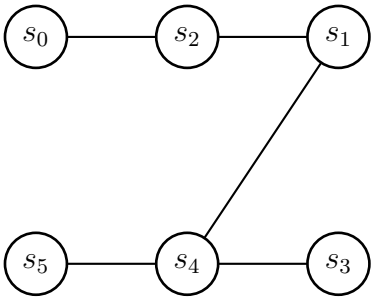


FIGURE 3 – T_1

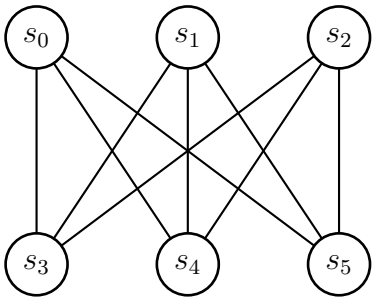


FIGURE 4 – H_2

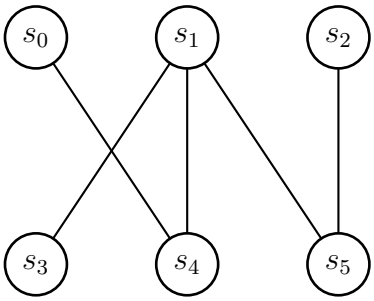
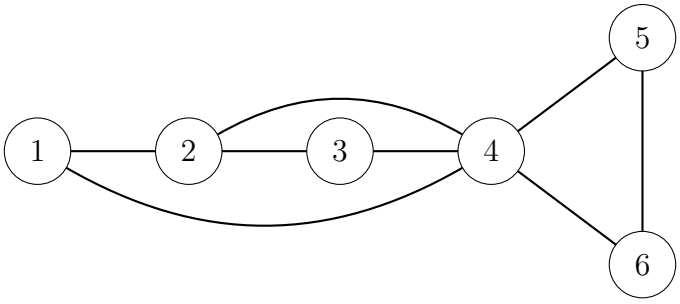


FIGURE 5 – T_2

Exercice 5

Cet exercice est extrait d'une annale d'un examen passé.
Dans cet exercice nous souhaitons utiliser l'algorithme `PP` du parcours en profondeur pour déterminer les points d'articulation d'un graphe non-orienté. Un *point d'articulation* est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

1. Déterminer les points d'articulation du graphe G suivant :



2. Modifier `PP(G)` en `NB_CC(G)` afin de compter le nombre de composantes connexes du graphe G. En utilisant `NB_CC(G)` écrire un algorithme calculant les points d'articulation du graphe G. Calculer sa complexité.

Dans la suite, nous allons mettre en place un algorithme plus efficace de calcul des points d'articulation. Pour cela, on fixe un sommet `r` et on considère l'arborescence de liaison `T(r)` définie par le parcours en profondeur de G à partir de `r`. Les arcs de *liaisons* sont les arcs `(u,v)` de G où `u`= `pere`(`v`) c'est-à-dire les arcs de `T(r)`, tandis que les arcs de *retour* sont les arcs `(u,v)` de G qui ne sont pas de liaison et où `v` est un ancêtre de `u` dans `T(r)`. On peut montrer que dans un `PP` sur un graphe non-orienté, les arcs sont soit de liaison soit de retour.

Pour tout sommet `v`, on définit `l[v]` comme la plus petite valeur de `d[u]` où `u` est soit égal à `v`, soit l'extrémité d'un arc retour `(w,u)` avec `w` descendant de `v` (`w`=`v` possible).

3. Calculer l'arbre `T(r)` pour G en prenant `r=1`. Distinguer les arcs de retour, et calculer `l[u]` pour tous les sommets `u` de G.

4. Modifier l'algorithme `PP` pour calculer `l[v]` pour tout sommet `v` d'un graphe G.

5. Établir que `v` est un point d'articulation si et seulement si :
   (a) soit `v` = `r` et `v` a au moins deux fils dans `T(r)`,
   (b) soit `v` $\neq$ `r` et `v` a au moins un fils `w` dans `T(r)` tel que `l[w]` $\geq$ `d[v]`.

6. Modifier l'algorithme `PP` pour calculer, pour tout sommet `v` d'un graphe, `pa[v]` qui vaut `vrai` si et seulement si `v` est un point d'articulation. Comparer la complexité de cet algorithme avec celle de l'algorithme de la question 2

7. Tester l'algorithme modifié sur le graphe G ci-dessus et sur le graphe obtenu en ajoutant à G l'arête `{6,3}`.
8. Tester l'algorithme sur le graphe H ci-dessous, en partant du sommet `r=0` et en suivant l'ordre croissant des sommets.